

1 Что значит "с точностью до линейного преобразования"?

В контексте теоремы это означает, что функция $\tau(\theta)$ может быть представлена в виде линейной комбинации $\frac{A'(\theta)}{\eta'(\theta)}$ с добавлением константы, т.е.

$$\tau(\theta) = a \cdot \frac{A'(\theta)}{\eta'(\theta)} + b,$$

где a и b — некоторые константы. Это позволяет утверждать, что эффективная оценка для $\tau(\theta)$ существует, если распределение принадлежит экспоненциальному семейству, и $\tau(\theta)$ связана с $\frac{A'(\theta)}{\eta'(\theta)}$ через линейное преобразование.

2 Как это работает на практике?

Если $\tau(\theta)$ выражается через $\frac{A'(\theta)}{\eta'(\theta)}$ с линейным преобразованием, то оценка строится аналогично

$$\hat{\tau}(\mathbf{X}) = a \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T(X_i) \right) + b.$$

Здесь $T(X_i)$ — достаточная статистика из канонической формы экспоненциального семейства.

Если $\tau(\theta)$ не представима в таком виде, то эффективной оценки не существует в рамках данного семейства распределений. В этом случае придется использовать другие методы (например, МНК), которые могут быть неэффективными.

Пример: Пусть $X_i \sim \text{Бернулли}(p)$, $\tau(\theta) = 2p + 1$.

Здесь $\frac{A'(\theta)}{\eta'(\theta)} = p$, поэтому $\tau(\theta) = 2p + 1 = 2 \cdot \frac{A'(\theta)}{\eta'(\theta)} + 1$.

Тогда эффективная оценка

$$\hat{\tau}(\mathbf{X}) = 2 \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) + 1.$$