Метод максимального правдоподобия

Листок

Определение 1. Пусть $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ — выборка с обобщенной плотностью $p_\theta(x)$. *Функцией правдоподобия* называется функция

$$\mathcal{L}(\theta) = p_\theta(\mathbf{X}) = \prod_{i=1}^n p_\theta(X_i).$$

Замечание 1. Функция правдоподобия — это совместная плотность данных (плотность вектора $\mathbf{X}$), за исключением того, что это функция от параметра θ , то есть $\mathcal{L} : \Theta \rightarrow \mathbb{R}_+$. Функция правдоподобия как функция от θ показывает, насколько правдоподобно значение параметра θ для данной выборки $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$. Она не является функцией плотности: $\int_{\Theta} \mathcal{L} d\theta \neq 1$.

Определение 2. Оценкой максимального правдоподобия (ОМП) параметра θ называется статистика

$$\hat{\theta}(X) = \arg \max_{\theta \in \Theta} \mathcal{L}(\theta).$$

Замечание 2. В русскоязычной литературе встречается обозначение $\hat{\theta}_{\text{ОМП}}(X)$ для Оценки Максимального Правдоподобия. На моих семинарах и в решениях можно встретить обозначение $\hat{\theta}_{\text{ММП}}(X)$ для оценки полученной Методом Максимального Правдоподобия. Делается это из соображения того, что для оценки метода моментов принято обозначение $\hat{\theta}_{\text{ММ}}(X)$.

Определение 3. Говорят, что распределение $\mathbb{P}_\theta$ принадлежит экспоненциальному семейству, если его обобщённая плотность представима в виде (каноническая параметризация $\eta = \eta(\theta)$)

$$p_\eta(x) = e^{\eta^T(x) - A(\eta)} h(x),$$

где T, A, h — некоторые функции, $\eta = \eta(\theta)$ — натуральный параметр распределения.

Теорема 1. Пусть $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ — выборка из распределения $\{\mathbb{P}_\theta : \theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}\}$. Эффективная оценка $\hat{\theta}(X)$ для некоторой функции $\tau(\theta)$ существует тогда и только тогда, когда $\mathbb{P}_\theta$ принадлежит экспоненциальному семейству, причём

$$\hat{\theta}(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T(X_i), \quad \text{и} \quad \tau(\theta) = \frac{dA}{d\eta} \quad \left(\text{из курса матанализа } \frac{dA}{d\theta} = \frac{dA}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{d\theta} \right)$$

(последние два равенства следует понимать с точностью до линейного преобразования).

Задачи

1 Относятся ли следующие семейства распределений к экспоненциальным? В случае положительного ответа найдите оценки неизвестного параметра θ методом максимального правдоподобия, а также определите функции $\tau(\theta)$, для которых существует эффективная оценка, и установите вид этой оценки. Пусть дана выборка $X_1, \dots, X_n$ из распределения:

(a) $\text{Ber}(\theta)$, $\theta \in (0, 1)$; $p_\theta(x) = \theta^x(1 - \theta)^{1-x}$, $x \in \{0, 1\}$;

(b) $\text{Bin}(k, \theta)$, $\theta \in (0, 1)$; $p_\theta(x) = C_k^x \theta^x (1 - \theta)^{k-x}$, $x \in \{0, 1, \dots, k\}$;

(c) $\text{Pois}(\theta)$, $\theta > 0$; $p_\theta(x) = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}$, $x \in \mathbb{Z}_+$;

(d) $\mathcal{U}(0, \theta)$, $\theta > 0$;

(e) $\Gamma(\alpha, \theta)$, $\theta > 0$; $p_\theta(x) = \frac{\theta^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\theta x}$, $x > 0$, $\alpha > 0$ известно;

(f) экспоненциальное (показательное) распределение со сдвигом θ

$$p_\theta(x) = e^{-(x-\theta)} \mathbb{I}\{x \geq \theta\}.$$

2 Пусть $X_1, \dots, X_n$ – выборка из нормального распределения $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Найдите оценки неизвестного параметра θ методом максимального правдоподобия, если:

(a) $\theta = \mu$, при этом σ^2 известно;

(b) $\theta = \sigma^2 > 0$, при этом μ известно;

(c) $\theta = \mu = \sigma^2 > 0$;

(d) $\theta = (\mu, \sigma^2)$.

Решение задач

Задача 1

(а) Распределение Бернулли $\text{Ber}(\theta)$

1. Проверка принадлежности к экспоненциальному семейству:

Плотность распределения Бернулли:

$$p_\theta(x) = \theta^x(1 - \theta)^{1-x}, \quad x \in \{0, 1\}.$$

Преобразуем выражение к канонической форме экспоненциального семейства:

$$p_\theta(x) = \exp(x \ln \theta + (1 - x) \ln(1 - \theta)) = \exp\left(x \ln\left(\frac{\theta}{1 - \theta}\right) + \ln(1 - \theta)\right).$$

Сравнивая с общей формой $p_\eta(x) = e^{\eta T(x) - A(\eta)} h(x)$, получаем:

$$\begin{cases} \eta = \ln\left(\frac{\theta}{1 - \theta}\right), \\ T(x) = x, \\ A(\eta) = -\ln(1 - \theta) = \ln(1 + e^\eta), \\ h(x) = 1. \end{cases}$$

Вывод: Распределение Бернулли принадлежит экспоненциальному семейству.

2. Оценка максимального правдоподобия для θ :

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$\ln \mathcal{L}(\theta) = \sum_{i=1}^n (x_i \ln \theta + (1 - x_i) \ln(1 - \theta)).$$

Найдем производную по θ :

$$\frac{d \ln \mathcal{L}}{d\theta} = \frac{\sum x_i}{\theta} - \frac{n - \sum x_i}{1 - \theta}.$$

Приравняем производную к нулю:

$$\frac{\sum x_i}{\theta} = \frac{n - \sum x_i}{1 - \theta} \implies \hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Проверим условие максимума через вторую производную:

$$\frac{d^2 \ln \mathcal{L}}{d\theta^2} = -\frac{\sum x_i}{\theta^2} - \frac{n - \sum x_i}{(1 - \theta)^2} < 0 \quad \forall \theta \in (0, 1).$$

Ответ: $\hat{\theta}_{\text{ММП}} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$

3. Функция $\tau(\theta)$ и эффективная оценка:

Из теоремы 1:

$$\tau(\theta) = \frac{A'(\eta)}{\eta'(\theta)},$$

где:

$$A(\eta) = \ln(1 + e^\eta), \quad A'(\eta) = \frac{e^\eta}{1 + e^\eta} = \theta,$$

$$\eta = \ln\left(\frac{\theta}{1 - \theta}\right), \quad \eta'(\theta) = \frac{1}{\theta(1 - \theta)}.$$

Подставляем:

$$\tau(\theta) = \frac{\theta}{\frac{1}{\theta(1 - \theta)}} = \theta(1 - \theta).$$

Эффективная оценка для $\tau(\theta)$:

$$\hat{\tau} = \hat{\theta}(1 - \hat{\theta}) = \bar{X}(1 - \bar{X}).$$

(b) Биномиальное распределение $\text{Bin}(k, \theta)$

1. Проверка принадлежности к экспоненциальному семейству:

Плотность распределения:

$$p_\theta(x) = C_k^x \theta^x (1 - \theta)^{k-x}, \quad x \in \{0, 1, \dots, k\}.$$

Преобразуем:

$$\begin{aligned} p_\theta(x) &= \exp(x \ln \theta + (k - x) \ln(1 - \theta)) \cdot C_k^x = \\ &= \exp\left(x \ln\left(\frac{\theta}{1 - \theta}\right) + k \ln(1 - \theta)\right) \cdot C_k^x. \end{aligned}$$

Каноническая параметризация:

$$\begin{cases} \eta = \ln\left(\frac{\theta}{1 - \theta}\right), \\ T(x) = x, \\ A(\eta) = -k \ln(1 - \theta) = k \ln(1 + e^\eta), \\ h(x) = C_k^x. \end{cases}$$

Вывод: Биномиальное распределение принадлежит экспоненциальному семейству.

2. Оценка максимального правдоподобия для θ :

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$\ln \mathcal{L}(\theta) = \sum_{i=1}^n (x_i \ln \theta + (k - x_i) \ln(1 - \theta)) + \text{const.}$$

Производная по θ :

$$\frac{d \ln \mathcal{L}}{d\theta} = \frac{\sum x_i}{\theta} - \frac{nk - \sum x_i}{1 - \theta}.$$

Приравниваем к нулю:

$$\frac{\sum x_i}{\theta} = \frac{nk - \sum x_i}{1 - \theta} \implies \hat{\theta} = \frac{1}{nk} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Вторая производная:

$$\frac{d^2 \ln \mathcal{L}}{d\theta^2} = -\frac{\sum x_i}{\theta^2} - \frac{nk - \sum x_i}{(1 - \theta)^2} < 0.$$

Ответ: $\hat{\theta}_{\text{ММП}} = \frac{1}{nk} \sum_{i=1}^n X_i.$

3. Функция $\tau(\theta)$ и эффективная оценка:

Из теоремы 1:

$$A'(\eta) = \frac{ke^\eta}{1 + e^\eta} = k\theta, \quad \eta'(\theta) = \frac{1}{\theta(1 - \theta)}.$$

Тогда:

$$\tau(\theta) = \frac{k\theta}{\theta(1 - \theta)} = k\theta^2(1 - \theta).$$

Эффективная оценка:

$$\hat{\tau} = k\hat{\theta}^2(1 - \hat{\theta}) = k \left(\frac{1}{nk} \sum X_i \right)^2 \left(1 - \frac{1}{nk} \sum X_i \right).$$

(с) Распределение Пуассона $\text{Pois}(\theta)$

1. Проверка принадлежности к экспоненциальному семейству:

Плотность распределения:

$$p_\theta(x) = \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!}, \quad x \in \mathbb{Z}_+.$$

Преобразуем:

$$p_\theta(x) = \exp(x \ln \theta - \theta) \cdot \frac{1}{x!}.$$

Каноническая параметризация:

$$\begin{cases} \eta = \ln \theta, \\ T(x) = x, \\ A(\eta) = e^\eta = \theta, \\ h(x) = \frac{1}{x!}. \end{cases}$$

Вывод: Распределение Пуассона принадлежит экспоненциальному семейству.

2. Оценка максимального правдоподобия для θ :

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$\ln \mathcal{L}(\theta) = \sum_{i=1}^n (x_i \ln \theta - \theta) - \sum \ln x_i!$$

Производная по θ :

$$\frac{d \ln \mathcal{L}}{d\theta} = \frac{\sum x_i}{\theta} - n.$$

Приравниваем к нулю:

$$\frac{\sum x_i}{\theta} = n \implies \hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Вторая производная:

$$\frac{d^2 \ln \mathcal{L}}{d\theta^2} = -\frac{\sum x_i}{\theta^2} < 0.$$

Ответ: $\hat{\theta}_{\text{ММП}} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$

3. Функция $\tau(\theta)$ и эффективная оценка:

Из теоремы 1:

$$A'(\eta) = e^\eta = \theta, \quad \eta'(\theta) = \frac{1}{\theta}.$$

Тогда:

$$\tau(\theta) = \frac{\theta}{\frac{1}{\theta}} = \theta^2.$$

Эффективная оценка:

$$\hat{\tau} = \hat{\theta}^2 = \left(\frac{1}{n} \sum X_i \right)^2.$$

(d) Равномерное распределение $\mathcal{U}(0, \theta)$

1. Проверка принадлежности к экспоненциальному семейству:

Плотность распределения:

$$p_\theta(x) = \frac{1}{\theta} \mathbb{I}(0 \leq x \leq \theta).$$

Равномерное распределение $\mathcal{U}(0, \theta)$ не принадлежит экспоненциальному семейству так как:

1. **Зависимость носителя от параметра θ :** Плотность распределения $\mathcal{U}(0, \theta)$ задаётся как:

$$p_\theta(x) = \frac{1}{\theta} \mathbb{I}_{\{0 \leq x \leq \theta\}},$$

где индикаторная функция $\mathbb{I}_{\{0 \leq x \leq \theta\}}$ ограничивает носитель распределения интервалом $[0, \theta]$. В экспоненциальном семействе носитель распределения (множество x , где $p_\theta(x) > 0$) **не должен зависеть от параметра θ** . Здесь же носитель явно зависит от θ , что нарушает это условие.

2. **Невозможность представления в экспоненциальной форме:** Для принадлежности к экспоненциальному семейству плотность должна быть записана как:

$$p_\eta(x) = e^{\eta T(x) - A(\eta)} h(x),$$

где $\eta = \eta(\theta)$. В случае равномерного распределения логарифм плотности имеет вид:

$$\ln p_\theta(x) = -\ln \theta + \ln \mathbb{I}_{\{0 \leq x \leq \theta\}}.$$

Индикатор $\mathbb{I}_{[0, \theta]}(x)$ не может быть выражен через экспоненту вида $e^{\eta(\theta)T(x)}$, так как он разрывен по x и θ .

Вывод: Распределение $\mathcal{U}(0, \theta)$ **не принадлежит** экспоненциальному семейству.

2. Оценка максимального правдоподобия для θ :

Функция правдоподобия:

$$\mathcal{L}(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} \mathbb{I}(X_i \leq \theta) = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{I}(\max X_i \leq \theta).$$

Максимум достигается при минимальном θ , удовлетворяющем условию $\theta \geq \max X_i$.

Ответ: $\hat{\theta}_{\text{ММП}} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$.

(е) Гамма-распределение $\Gamma(\alpha, \theta)$ (α известно)

1. Проверка принадлежности к экспоненциальному семейству:

Плотность распределения:

$$p_\theta(x) = \frac{\theta^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\theta x}.$$

Преобразуем к канонической форме:

$$p_\theta(x) = \exp(-\theta x + \alpha \ln \theta + (\alpha - 1) \ln x - \ln \Gamma(\alpha)).$$

Каноническая параметризация:

$$\begin{cases} \eta = -\theta, \\ T(x) = x, \\ A(\eta) = \alpha \ln(-\eta), \\ h(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}. \end{cases}$$

Вывод: Гамма-распределение **принадлежит** экспоненциальному семейству.

2. Оценка максимального правдоподобия для θ :

Логарифмическая функция правдоподобия:

$$\ln \mathcal{L}(\theta) = n\alpha \ln \theta - \theta \sum_{i=1}^n X_i + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \ln X_i - n \ln \Gamma(\alpha).$$

Производная по θ :

$$\frac{d \ln \mathcal{L}}{d\theta} = \frac{n\alpha}{\theta} - \sum_{i=1}^n X_i.$$

Приравниваем к нулю:

$$\frac{n\alpha}{\theta} = \sum_{i=1}^n X_i \implies \hat{\theta} = \frac{n\alpha}{\sum_{i=1}^n X_i} = \frac{\alpha}{\bar{X}}.$$

Вторая производная:

$$\frac{d^2 \ln \mathcal{L}}{d\theta^2} = -\frac{n\alpha}{\theta^2} < 0 \quad (\theta > 0).$$

Ответ: $\hat{\theta}_{\text{ММП}} = \frac{\alpha}{\bar{X}}$.

3. Функция $\tau(\theta)$ и эффективная оценка:

Из теоремы 1:

$$A'(\eta) = \frac{\alpha}{\eta} = -\frac{\alpha}{\theta}, \quad \eta'(\theta) = -1.$$

Следовательно:

$$\tau(\theta) = \frac{-\frac{\alpha}{\theta}}{-1} = \frac{\alpha}{\theta}.$$

Эффективная оценка:

$$\hat{\tau} = \frac{\alpha}{\hat{\theta}} = \frac{\alpha}{\alpha/\bar{X}} = \bar{X}.$$

(f) Экспоненциальное распределение со сдвигом θ

1. Проверка принадлежности к экспоненциальному семейству:

Плотность распределения:

$$p_{\theta}(x) = e^{-(x-\theta)} \mathbb{I}(x \geq \theta).$$

Параметр θ входит в индикаторную функцию $\mathbb{I}(x \geq \theta)$, что нарушает структуру экспоненциального семейства.

Вывод: Данное распределение **не принадлежит** экспоненциальному семейству.

2. Оценка максимального правдоподобия для θ :

Функция правдоподобия:

$$\mathcal{L}(\theta) = \prod_{i=1}^n e^{-(X_i - \theta)} \mathbb{I}(X_i \geq \theta) = e^{-\sum_{i=1}^n X_i + n\theta} \mathbb{I}(\min X_i \geq \theta).$$

Максимум достигается при наибольшем θ , удовлетворяющем условию $\theta \leq \min X_i$.

Ответ: $\hat{\theta}_{\text{ММП}} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i$.

Задача 2

Условие: Для выборки $X_1, \dots, X_n$ из нормального распределения $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ найти оценки максимального правдоподобия (ММП) параметра θ в следующих случаях:

(а) $\theta = \mu, \sigma^2$ известно

1. Функция правдоподобия:

$$\mathcal{L}(\mu) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(X_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

2. Логарифмическая функция правдоподобия:

$$\ln \mathcal{L}(\mu) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2.$$

3. Производная по μ :

$$\frac{d \ln \mathcal{L}}{d\mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu).$$

4. Условие максимума:

$$\sum_{i=1}^n (X_i - \mu) = 0 \implies \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}.$$

5. Проверка второй производной:

$$\frac{d^2 \ln \mathcal{L}}{d\mu^2} = -\frac{n}{\sigma^2} < 0 \quad (\text{максимум}).$$

Ответ: $\hat{\mu}_{\text{ММП}} = \bar{X}$.

(б) $\theta = \sigma^2 > 0, \mu$ известно

1. Функция правдоподобия:

$$\mathcal{L}(\sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(X_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

2. Логарифмическая функция правдоподобия:

$$\ln \mathcal{L}(\sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2.$$

3. Производная по σ^2 :

$$\frac{d \ln \mathcal{L}}{d\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2.$$

4. Условие максимума:

$$-\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = 0 \implies \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2.$$

5. Проверка второй производной:

$$\frac{d^2 \ln \mathcal{L}}{d(\sigma^2)^2} = \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{\sum (X_i - \mu)^2}{\sigma^6}.$$

Подстановка $\hat{\sigma}^2$:

$$\frac{n}{2\hat{\sigma}^4} - \frac{n\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^6} = -\frac{n}{2\hat{\sigma}^4} < 0 \quad (\text{максимум}).$$

Ответ: $\hat{\sigma}_{\text{ММП}}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2.$

(с) $\theta = \mu = \sigma^2 > 0$

1. Функция правдоподобия:

$$\mathcal{L}(\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-\frac{(X_i - \theta)^2}{2\theta}}.$$

2. Логарифмическая функция правдоподобия:

$$\ln \mathcal{L}(\theta) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\theta) - \frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2.$$

3. Производная по θ :

$$\frac{d \ln \mathcal{L}}{d\theta} = -\frac{n}{2\theta} + \frac{1}{2\theta^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \theta)^2 + \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n (X_i - \theta).$$

4. Условие максимума: Решение уравнения требует численных методов, так как аналитическое выражение для $\hat{\theta}$ отсутствует. Однако можно показать, что оценка удовлетворяет соотношению:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\theta})^2.$$

Ответ: $\hat{\theta}_{\text{ММП}}$ находится как решение уравнения $\hat{\theta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\theta})^2.$

(d) $\theta = (\mu, \sigma^2)$

1. Функция правдоподобия:

$$\mathcal{L}(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(X_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

2. Логарифмическая функция правдоподобия:

$$\ln \mathcal{L}(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2.$$

3. Производные:

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu), \\ \frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2. \end{cases}$$

4. Условия максимума:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) = 0 \implies \hat{\mu} = \bar{X}, \\ -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = 0 \implies \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2. \end{cases}$$

Ответ: $\hat{\mu}_{\text{ММП}} = \bar{X}$, $\hat{\sigma}^2_{\text{ММП}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.

$$(d) \theta = (\mu, \sigma^2)$$

Корректность условия экстремума:

Для многомерной функции правдоподобия обнуление частных производных первого порядка является необходимым, но не достаточным условием максимума. Для строгого доказательства требуется анализ матрицы Гессе (матрицы вторых производных).

1. Матрица Гессе:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \mu \partial \sigma^2} \\ \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \sigma^2 \partial \mu} & \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial (\sigma^2)^2} \end{pmatrix},$$

где:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \mu^2} = -\frac{n}{\sigma^2}, \\ \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \mu \partial \sigma^2} = -\frac{1}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu), \\ \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial (\sigma^2)^2} = \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2. \end{cases}$$

2. Подстановка оценок $\hat{\mu} = \bar{X}$ и $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2$:

$$H|_{\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2} = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\hat{\sigma}^2} & 0 \\ 0 & -\frac{n}{2\hat{\sigma}^4} \end{pmatrix}.$$

3. Анализ определённости: Матрица диагональна с отрицательными элементами:

$$-\frac{n}{\hat{\sigma}^2} < 0, \quad -\frac{n}{2\hat{\sigma}^4} < 0.$$

Главные миноры положительны:

$$\det(H) = \left(-\frac{n}{\hat{\sigma}^2}\right) \left(-\frac{n}{2\hat{\sigma}^4}\right) - 0 = \frac{n^2}{2\hat{\sigma}^6} > 0.$$

Матрица Гессе **отрицательно определена**, что гарантирует локальный максимум.

4. Итог: Несмотря на многомерность, в данном случае: - Условия первого порядка ($\partial/\partial\mu = 0$, $\partial/\partial\sigma^2 = 0$) приводят к единственной стационарной точке. - Матрица Гессе в этой точке отрицательно определена. Следовательно, найденные оценки $\hat{\mu} = \bar{X}$ и $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})^2$ действительно являются ****точкой максимума****.

$$\text{Ответ: } \hat{\mu}_{\text{ММП}} = \bar{X}, \quad \hat{\sigma}_{\text{ММП}}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

(d) $\theta = (\mu, \sigma^2)$

1. Функция правдоподобия:

$$\mathcal{L}(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(X_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

2. Логарифмическая функция правдоподобия:

$$\ln \mathcal{L}(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2.$$

3. Частные производные первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu), \\ \frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2. \end{cases}$$

4. Решение системы уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu) = 0 \implies \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}, \\ -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = 0 \implies \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2. \end{cases}$$

5. Проверка условий второго порядка (матрица Гессе):

Вычислим вторые производные:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \mu^2} = -\frac{n}{\sigma^2}, \\ \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial \mu \partial \sigma^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \left(\frac{1}{\sigma^2} \sum (X_i - \mu) \right) = -\frac{1}{\sigma^4} \sum (X_i - \mu), \\ \frac{\partial^2 \ln \mathcal{L}}{\partial (\sigma^2)^2} = \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6} \sum (X_i - \mu)^2. \end{cases}$$

Матрица Гессе в точке $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$:

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\hat{\sigma}^2} & -\frac{1}{\hat{\sigma}^4} \sum (X_i - \hat{\mu}) \\ -\frac{1}{\hat{\sigma}^4} \sum (X_i - \hat{\mu}) & \frac{n}{2\hat{\sigma}^4} - \frac{1}{\hat{\sigma}^6} \sum (X_i - \hat{\mu})^2 \end{pmatrix}.$$

Упрощение: - Поскольку $\sum (X_i - \hat{\mu}) = 0$ (из условия первого порядка), внедиагональные элементы равны нулю. - Сумма $\sum (X_i - \hat{\mu})^2 = n\hat{\sigma}^2$.

Подставляя $\sum (X_i - \hat{\mu})^2 = n\hat{\sigma}^2$:

$$H = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\hat{\sigma}^2} & 0 \\ 0 & \frac{n}{2\hat{\sigma}^4} - \frac{n\hat{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\hat{\sigma}^2} & 0 \\ 0 & -\frac{n}{2\hat{\sigma}^4} \end{pmatrix}.$$

Анализ отрицательной определённости: - Диагональные элементы:
 $-\frac{n}{\hat{\sigma}^2} < 0$ и $-\frac{n}{2\hat{\sigma}^4} < 0$. - Определитель матрицы:

$$\det(H) = \left(-\frac{n}{\hat{\sigma}^2}\right) \left(-\frac{n}{2\hat{\sigma}^4}\right) - 0 = \frac{n^2}{2\hat{\sigma}^6} > 0.$$

Матрица Гессе ****отрицательно определена****, что гарантирует локальный максимум.

6. Итоговые оценки:

$$\hat{\mu}_{\text{ММП}} = \bar{X}, \quad \hat{\sigma}_{\text{ММП}}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$