Семинар - 13.

Теория:

Байесовская оценка

Определение. *Байесовской оценкой* называется функция $\widehat{\theta}_\pi$, минимизирующая *байесовский риск*

$$B_\pi\left(\widehat{\theta}\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\rho\left(\theta, \widehat{\theta}\right)\Big|\theta\right]\right], \quad \text{где} \quad \rho \quad \text{— функция риска,}$$

то есть

$$\widehat{\theta}_\pi = \arg\min_{\widehat{\theta}} B_\pi(\widehat{\theta}).$$

В случае квадратичной функции потерь, то есть при $\rho(\theta, \widehat{\theta}) = (\theta - \widehat{\theta})^2$, байсовская оценка может быть найдена

$$\widehat{\theta}_\pi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbb{E}[\theta | X_1 = x_1, X_2 = x_2 \ldots, X_n = x_n] = \int_\Theta \theta\pi(\theta|x_1, x_2, \ldots, x_n)\, d\theta.$$

Определение (Бета-распределение)**.** Будем говорить, что случайная величина ξ имеет бета-распределение $\mathrm{Beta}(\alpha, \beta)$ с параметрами $\alpha, \beta > 0$, если плотность ее распределения равна

$$p(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)}\, x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad x \in [0, 1],$$

где $B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = \frac{\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}dx$ – бета-функция, $\alpha, \beta > 0$.

Непрерывное распределение. Используется для описания случайных величин, значения которых ограничены конечным интервалом.

Момент:

$$\mathbb{E}[\xi] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}.$$

Определение (Гама-распределение)**.** *Гама-распределением* $\mathrm{Gamma}(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta > 0$ называется распределение случайной величины ξ с плотностью

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}e^{-\beta x}\mathbb{1}\{x \geq 0\},$$

где $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\, dt$ — гамма-функция, $\alpha \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(\alpha) > 0$.

Момент:

$$\mathbb{E}[\xi] = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Задача 1 - аналогична лекции.

2. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — выборка из нормального распределения $\mathcal{N}(\theta, 1)$, $\theta \in \mathbb{R}$. Найдите байесовскую оценку параметра θ, если его априорное распределение также является нормальным $\mathcal{N}(\beta, \sigma^2)$ с параметрами $\beta \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$.

$$\boxed{\pi(\theta|x^n) \propto \mathcal{L}(\theta)\pi(\theta)}$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\theta)^2}{2}\right\}.$$

$$\mathcal{L}(\theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i|\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\theta)^2}{2}\right\}.$$

$$\pi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(\theta-\beta)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$\pi(\theta)$ на (4)

$$\pi(\theta|x^n) = Const \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sigma^2\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\theta + \theta^2) + \theta^2 + \beta^2 - 2\theta\beta\right)\right\}$$

$$= Const \, \frac{1}{\sqrt{\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\theta^2(n\sigma^2+1) - 2\theta(\sigma^2 n\bar{X} + \beta)\right)\right\}$$

$$= Const \, \frac{1}{\sqrt{\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{\overset{\text{неизв.}}{c}}{2\sigma^2}(\theta - \underset{\text{неизв.}}{a})^2 + Const\right\}$$

сворачиваем и норм., потому что мы знаем, что будет сократ. (по усл.)

Ищем мат. ожидание $\underline{a}$:

$$-\frac{(n\sigma^2+1)}{2\sigma^2}\left(\theta^2 - \frac{2(\sigma^2 n\bar{X} + \beta)\theta}{n\sigma^2+1}\right)$$

$$(\theta - a)^2 = \theta^2 - 2a\theta + a^2$$

$$\Downarrow$$

$$a = \frac{n\bar{X}\sigma^2 + \beta}{n\sigma^2 + 1}$$

это же и будет ответом, так как по теореме для оценки и надо искать мат. ожидание

3.

3. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — выборка из распределения Пуассона Poiss(n, θ) с неизвестным параметром $\theta > 0$. В качестве априорного распределения для θ берется экспоненциальное распределение Exp(λ) с известной λ. Найдите байесовскую оценку параметра θ.

справка

$$p(X|\theta) = \frac{\theta^X e^{-\theta}}{X!}$$

$$\pi(\theta) = \lambda e^{-\lambda\theta}$$

$$p(x) = \theta e^{-\theta x}$$

$X_1, \dots X_n \sim Poiss(\theta)$, $\theta > 0$

Gamma - сопряж.
носители совпад.

$\theta \sim Exp(\lambda)$ $\quad \Theta = \mathbb{R}_+$

$= Gamma(\dots)$

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(X_i|\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^{X_i} e^{-\theta}}{X_i!} = \frac{\theta^{n\overline{X}} e^{-n\theta}}{\prod X_i!}$$

Gamma(α, β)

$$L(\theta)\pi(\theta) = \frac{\theta^{n\overline{X}} e^{-n\theta}}{\prod X_i!} \cdot \lambda e^{-\lambda\theta} = \frac{\lambda \theta^{n\overline{X}} e^{-\theta(n+\lambda)}}{\prod X_i! = const}$$

$$Exp(\lambda) = Gamma(1, \lambda)$$

$$\beta = n + \lambda \qquad \alpha = n\overline{X} + 1 \qquad E[\xi] = \frac{n\overline{X}+1}{n+\lambda}$$

Что будет, если в качестве априорного распред. взять не плотность?
(и если апропр. не несёт никакой инфы)

$X_1, \dots X_n \sim \mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$

$\pi(\theta) = const$

$$\boxed{\int_{\Theta} \pi(\theta)d\theta \neq 1}$$ improper prior

$$L(\theta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{\sum (X_i - \theta)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$\pi(\theta|x) = C_1 \frac{1}{\sigma^n} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(\theta - X_i)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$= C_2 \frac{1}{\sigma^n} \exp\left\{-\frac{\theta^2 - 2\theta\overline{X} + \frac{1}{n}\sum X_i^2}{2\sigma^2/n}\right\}$$

$$= C_1 \frac{1}{\sigma^n} \exp\left\{-\frac{(\theta - \overline{X})^2}{2\sigma^2/n} + C_2\right\} \sim \mathcal{N}\left(\overline{X}, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\hat{\theta}_{\pi} = \overline{X} = \hat{\theta}_{ОМП}$$

← пришли к ОМП, так что смысла особо и нет.

5. 5. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — выборка из экспоненциального распределения со сдвигом $\theta > 0$, то есть распределения с плотностью $p_\theta(x) = e^{\theta - x}\mathbb{1}\{x > \theta\}$. Найдите байесовскую оценку параметра θ, если априорным распределением для θ является равномерное распределение $\mathcal{U}(0, a)$ на отрезке $[0, a]$ с некоторым $a > 0$.

$$X_1, \ldots X_n \sim p(x|\theta) = e^{-(x-\theta)} \operatorname{Ind}(x > \theta), \quad \theta \geq 0$$

$$\pi(\theta) = \frac{1}{a} \operatorname{Ind}(\theta \in [0, a]), \quad 0 \leq \theta \leq a$$

$$\mathcal{L}(\theta) = \prod_{i=1}^{n} e^{\theta - X_i} = e^{\sum_{i=1}^{n}(\theta - X_i)} = e^{n\theta - n\bar{X}}$$

$$\pi(\theta | x^n) \propto \mathcal{L}(\theta)\pi(\theta)$$

$$= e^{n\theta - n\bar{X}} \cdot \frac{1}{a} \operatorname{Ind}(0 < \theta < a) \operatorname{Ind}(\theta < X_{(1)})$$

$$= \frac{e^{n\theta - n\bar{X}}}{a} \operatorname{Ind}(0 < \theta < \min(a, X_{(1)}))$$

это распред. не знаем.

Здесь надо считать интеграл:

$$\hat{\theta}_\pi = \mathbb{E}[\theta | x^n] = \int_{\Theta} \theta \cdot \pi(\theta | x^n) \, d\theta =$$

$c = \min(a, X_{(1)})$

$c = \min(a, X_{(1)})$

$$\hat{\theta}_\pi = \int_0^c \theta \cdot \frac{\mathcal{L}(\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} \mathcal{L}(\theta)\pi(\theta)d\theta} \, d\theta = \frac{\int_0^c \theta \mathcal{L}(\theta)\pi(\theta)d\theta}{\int_0^c \mathcal{L}(\theta)\pi(\theta)d\theta}$$

$$\text{ч.} = \frac{1}{a e^{n\bar{X}}} \int_0^c \theta e^{n\theta} d\theta$$

$$\int \theta e^{n\theta} d\theta = \frac{\theta e^{n\theta}}{n}\Big|_0^c - \int_0^c \frac{e^{n\theta}}{n} d\theta = \frac{c e^{nc}}{n} - \frac{e^{n\theta}}{n^2}\Big|_0^c = \frac{c e^{nc}}{n} - \frac{1}{n^2}(e^{nc} - 1) = \frac{1}{n}\left(c e^{nc} - \frac{e^{nc}}{n} + \frac{1}{n}\right)$$

$$\text{знам.} \quad \frac{1}{a e^{n\bar{X}}} \int_0^c e^{n\theta} d\theta$$

$$\int_0^c e^{n\theta} d\theta = \frac{e^{n\theta}}{n}\Big|_0^c = \frac{e^{nc}}{n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n}(e^{nc} - 1)$$

$$= \frac{c e^{nc} - e^{nc}/n + 1/n}{e^{nc} - 1}$$

оценка