

Семинар - 12.

Теория:

Тесты на однородность. t -тест, f -тест, χ^2 -критерий

Хи-квадрат для проверки однородности

Дано: m независимых выборок

$$\begin{aligned} X_1^1, \dots, X_{n_1}^1 &\sim F_1(x) \\ &\vdots \\ X_1^m, \dots, X_{n_m}^m &\sim F_m(x) \\ H_0 : F_1(x) = \dots = F_m(x) &= F(x) \text{ (неизвестна) } . \end{aligned}$$

По выборкам составим векторы частот ν_k и рассмотрим статистику

$$T_{\chi^2} = \sum_{k,j=1}^{m,N} \frac{(\nu_{kj} - n_k \hat{p}_j)^2}{n_k \hat{p}_j},$$

где

$$\hat{p}_j = \frac{\sum_{k=1}^m \nu_{kj}}{n}, \quad n = \sum_{k=1}^m n_k.$$

Предельное распределение статистики при справедливости H_0 при всех $n_k \rightarrow \infty$, $k = 1, \dots, m$

$$T_{\chi^2} = \sum_{k,j=1}^{m,N} \frac{(\nu_{kj} - n_k \hat{p}_j)^2}{n_k \hat{p}_j} \xrightarrow{d} \chi^2((m-1)(N-1)).$$

Задачи:

Задачи

1. (t -тест) Имеются две выборки: $\mathbf{Y} = (X_1, \dots, X_n)$ из распределения $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ и $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$ из распределения $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Выдвинута гипотеза $H_0 : \mu_1 = \mu_2$. Построить критерий уровня значимости α для проверки гипотезы H_0 , если

- (a) σ_1^2 и σ_2^2 известны;
- (b) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, но значение σ^2 неизвестно.

Рассмотреть случаи альтернатив $H_1 : \mu_1^2 \neq \mu_2^2$, $H_1 : \mu^2 < \mu_2^2$, $H_1 : \mu_1^2 > \mu_2^2$.

2. (f -тест) Имеются две выборки: $\mathbf{Y} = (X_1, \dots, X_n)$ из распределения $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ и $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$ из распределения $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, причем параметры $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ неизвестны. Выдвинута гипотеза $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Построить критерий уровня значимости α для проверки гипотезы H_0 . Рассмотреть случаи альтернатив $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, $H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$, $H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

3. (*python*) Поступающие в ВУЗ абитуриенты разбиты на два потока по 300 человек в каждом. Итоги экзамена по одному и тому же предмету на каждом потоке оказались следующими: на 1-м потоке баллы 2, 3, 4 и 5 получили соответственно 33, 43, 80 и 144 человека; соответствующие же данные для второго потока – 39, 35, 72 и 154:

оценка	2 (неуд)	3 (уд)	4 (хор)	5 (отл)
1ый поток	33	43	80	144
2ой поток	39	35	72	154

Можно ли при уровне значимости $\alpha = 0.05$ считать оба потока однородными?

Сначала идёт обсуждение про оценки за
 к/р студентов до 1 поке сурсов. Просто мотив. для 1-го зав.

1. (t-тест) Имеются две выборки: $Y = (X_1, \dots, X_n)$ из распределения $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ и $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ из распределения $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$. Выдвинута гипотеза $H_0: \mu_1 = \mu_2$. Построить критерий уровня значимости α для проверки гипотезы H_0 , если

- (a) σ_1^2 и σ_2^2 известны;
- (b) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, но значение σ^2 неизвестно.

Рассмотреть случаи альтернатив $H_1: \mu_1 \neq \mu_2, H_1: \mu_1 < \mu_2, H_1: \mu_1 > \mu_2$.

альтернативы

случаи
доп.
курс
не учил.
гол.

$$X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$$

$$Y_1, \dots, Y_m \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$$

$$(H_0: \mu_1 = \mu_2)$$

$$\left. \begin{array}{l} H_1^-: \mu_1 < \mu_2 \\ H_1^+: \mu_1 > \mu_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \mu_1 \neq \mu_2$$

a) статистика: $T = \bar{X} - \bar{Y} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \rightarrow$

Тогда крит. обл:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \stackrel{H_0}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$$

$$T > t_{\alpha} \text{ для } H_1^+ \quad T < -t_{\alpha} \text{ для } H_1^- \quad |T| \geq t_{\alpha} \text{ для } H_1^{\neq}$$

↑ зависит от альтернативы.

б) что делать если неизв. дисперсии:

оценки →

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n+m-2} \left(\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{j=1}^m (Y_j - \bar{Y})^2 \right) = \frac{(n-1)\hat{\sigma}_1^2 + (m-1)\hat{\sigma}_2^2}{n+m-2}$$

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

$$\hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{j=1}^m (Y_j - \bar{Y})^2$$

$$\frac{(n-1)\hat{\sigma}_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n-1) \quad \frac{(m-1)\hat{\sigma}_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(m-1)$$

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1) \quad \frac{(n+m-2)\hat{\sigma}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n+m-2)$$

чтобы показать независимость.

вспомогательная статистика

по т. Фишера →

$$\uparrow \text{ (т.б.б.о.: } \chi^2(n) + \chi^2(m) \sim \chi^2(n+m) \text{)}$$

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{2\sigma^2}}$$



$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{2\sigma^2}} \cdot \frac{\sqrt{2\sigma^2}}{\sqrt{2\sigma^2}} = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{2\sigma^2}} \cdot \frac{\sqrt{2\sigma^2}}{\sqrt{\sigma^2(n+m-2)}}$$

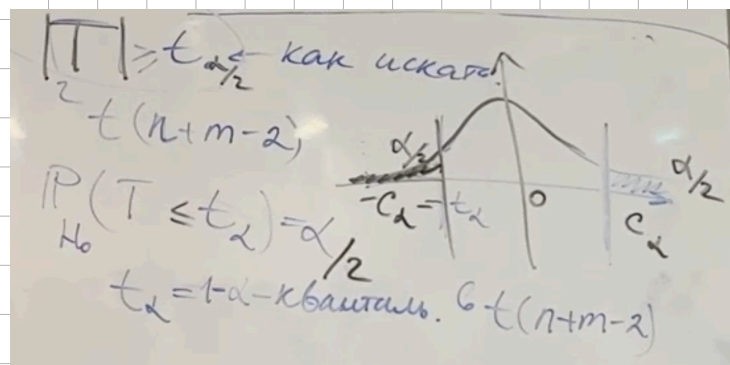
минус

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y})}{\sqrt{2\sigma^2}} \sim \sqrt{\frac{\sigma^2(n+m-2)}{\sigma^2} \cdot \frac{1}{(n+m-2)}} = \sqrt{\frac{\sigma^2(n+m-2)}{\sigma^2}} \sim \chi^2(n+m-2), \sigma^2$$

$$t = \frac{\xi \sim N(0,1)}{\sqrt{\frac{\eta}{m}}}$$

$\eta \sim \chi^2(m)$
 ξ и η — независ.
 $\bar{X}$ и S_0^2 — независ.

независимость получается из вида
 оценен вид. дисп. и т. Риснера



2. (f-тест) Имеются две выборки: $\mathbf{Y} = (X_1, \dots, X_n)$ из распределения $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ и $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$ из распределения $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, причем параметры $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ неизвестны. Выдвинута гипотеза $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$. Построить критерий уровня значимости α для проверки гипотезы H_0 . Рассмотреть случаи альтернатив $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2, H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2, H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$.

$$\begin{aligned} X_1, \dots, X_n &\sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) \\ Y_1, \dots, Y_m &\sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2) \\ H_0: \sigma_1^2 &= \sigma_2^2 \end{aligned}$$

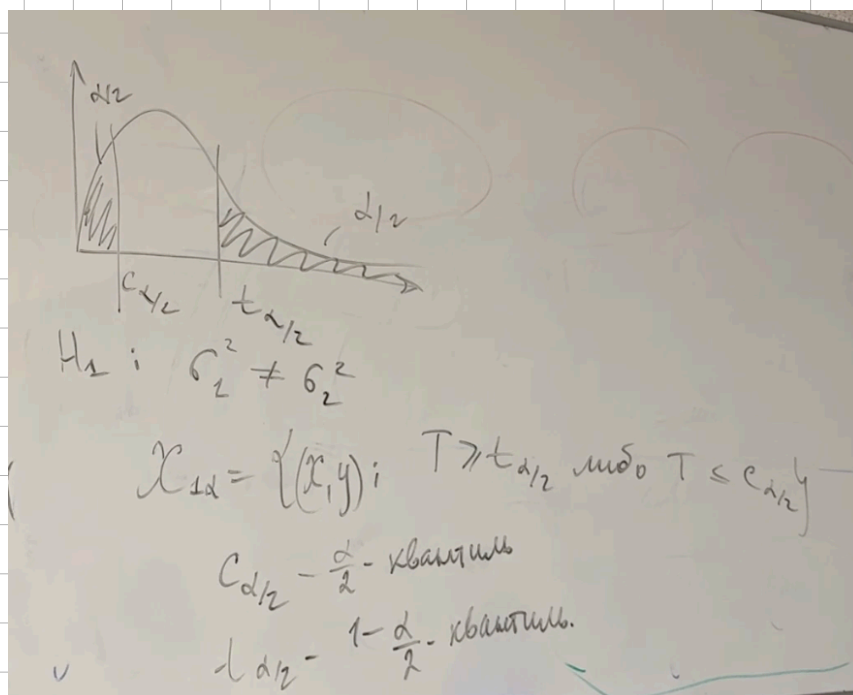
Распределение
Фигера:

$$f = \frac{\xi/r}{\eta/l} \sim F(r, l)$$

ξ и η - независимы.
 $\xi \sim \chi^2(r), \eta \sim \chi^2(l)$

$$T = \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2} = \frac{(n-1)\hat{\sigma}_1^2}{(m-1)\hat{\sigma}_2^2} \cdot \frac{(m-1)}{(n-1)}$$

$F(n-1, m-1)$
 $\chi^2(m-1)$



3. (python) Поступающие в ВУЗ абитуриенты разбиты на два потока по 300 человек в каждом. Итоги экзамена по одному и тому же предмету на каждом потоке оказались следующими: на 1-м потоке баллы 2, 3, 4 и 5 получили соответственно 33, 43, 80 и 144 человека; соответствующие же данные для второго потока – 39, 35, 72 и 154:

оценка	2 (неуд)	3 (уд)	4 (хор)	5 (отл)
1ый поток	33	43	80	144
2ой поток	39	35	72	154

Можно ли при уровне значимости $\alpha = 0.05$ считать оба потока однородными?

Используем асимпт. критерий однородности:

$$T_{\chi^2} = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^N \frac{(v_j^{(k)} - n_k \hat{p}_j^0)^2}{n_k \hat{p}_j^0}$$

$$\hat{p}_j^0 = \frac{\sum_{k=1}^K v_j^{(k)}}{\sum n_k}$$

$$T_{\chi^2} \geq t_{\alpha} \quad t_{\alpha} - 1-\alpha \text{-квантиль } \chi^2_{(K-1)(N-1)}$$