Семинар-10.

теория

Гипотезы. Критерий Неймана-Пирсона

Постановка задачи. Имеется выборка $(X_1, \ldots, X_n)$ из распределения $\mathbb{P}_\theta, \theta = \{\theta_0, \theta_1\}$. Построить наиболее мощный критерий уровня значимости $\alpha \in (0, 1)$ для проверки простой гипотезы против простой альтернативы

$$H_0 : \theta = \theta_0;$$
$$H_1 : \theta = \theta_1 \ (\theta_1 > \theta_0). \qquad (1)$$

Определение (Статистика отношения правдоподобий)**.** Статистикой отношения правдоподобий называется статистика

$$\Lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{p_{\theta_1}(\boldsymbol{x})}{p_{\theta_0}(\boldsymbol{x})} = \frac{\prod_{i=1}^n p_{\theta_1}(x_i)}{\prod_{i=1}^n p_{\theta_0}(x_i)}.$$

Введем функцию

$$\varphi(t) = \mathbb{P}_0(\Lambda(\boldsymbol{X}) \geq t) \qquad (2)$$

и предположим, что она непрерывна.

Теорема 1 (Нейман, Пирсон)**.** *Пусть дана выборка $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ из распределения $\mathbb{P}_\theta, \theta = \{\theta_0, \theta_1\}$. Пусть $p_{\theta_0}, p_{\theta_1} > 0$. Допустим, что функция φ, определенная в (2) непрерывна. Зафиксируем произвольное $\alpha \in (0, 1)$ и найдем $t_\alpha \geq 0$, удовлетворяющее равенству $\varphi(t_\alpha) = \alpha$ для φ, определенной в (2). Тогда в задаче (1) статистический критерий δ^* с критической областью*

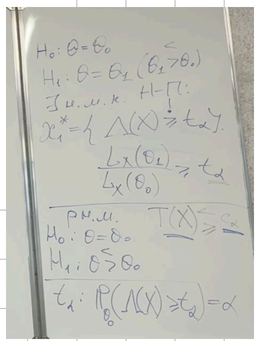
$$\mathcal{X}_1^* = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \Lambda(\mathbf{x}) \geq t_\alpha\} \qquad (3)$$

является наиболее мощным среди всех критериев уровня значимости α.

Теорема 2 (О монотонном отношении правдоподобий)**.** *Допустим, что проверяется простая гипотеза H_0: $\theta = \theta_0$ против односторонней альтернативы H_1: $\theta > \theta_0$. Пусть статистика отношения правдоподобия является монотонной функцией от достаточной статистики $T(\boldsymbol{X})$, то есть такой, что правдоподобие представляется в виде $L_{\mathbf{X}}(\theta) = g(T(\mathbf{X}), \theta)h(\mathbf{X})$, где g и h – некоторые функции. Тогда в задаче (H_0, H_1) существует равномерно наиболее мощный критерий, совпадающий с критерием Неймана-Пирсона для простой гипотезы и простой альтернативы .*

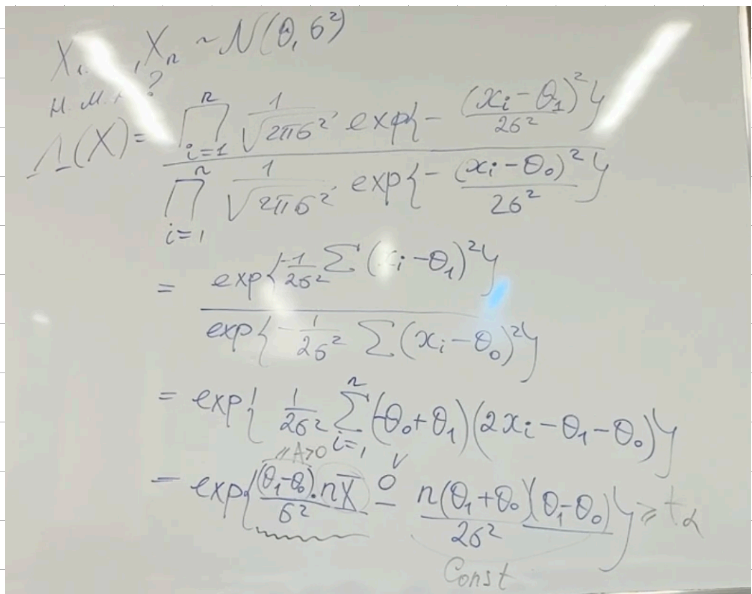
Примечание. В условиях Теоремы (2) гипотезы со знаками $(=, >)$ могут быть заменены на гипотезы $(=, <)$, $(\geq, <)$ или $(\leq, >)$; критерий останется таким же. В случае монотонного убывания отношения правдоподобия знак в критерии меняется на противоположный.

еще теория

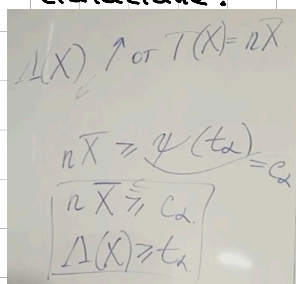


Задачи:

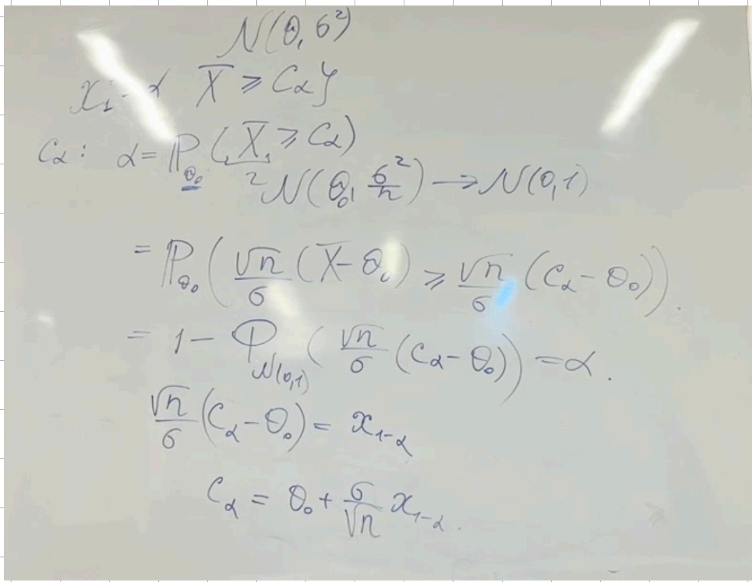
1. 1. Пусть дана выборка $X_1, \ldots, X_n$ из нормального распределения $\mathcal{N}(\theta, \sigma^2)$, σ^2 известна. Построить наиболее мощный критерий для проверки гипотезы $H_0 : \theta = \theta_0$ против альтернативы $H_1 : \theta = \theta_1$ $(\theta_1 > \theta_0)$ на уровне значимости $\alpha \in (\mu, 1)$. Найти мощность этого критерия.



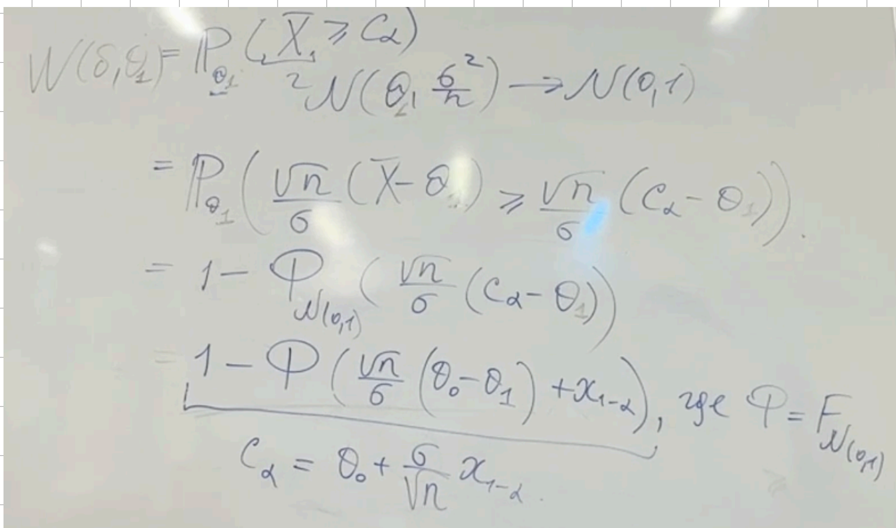
пояснение про переход к достат статистике:



достигаем

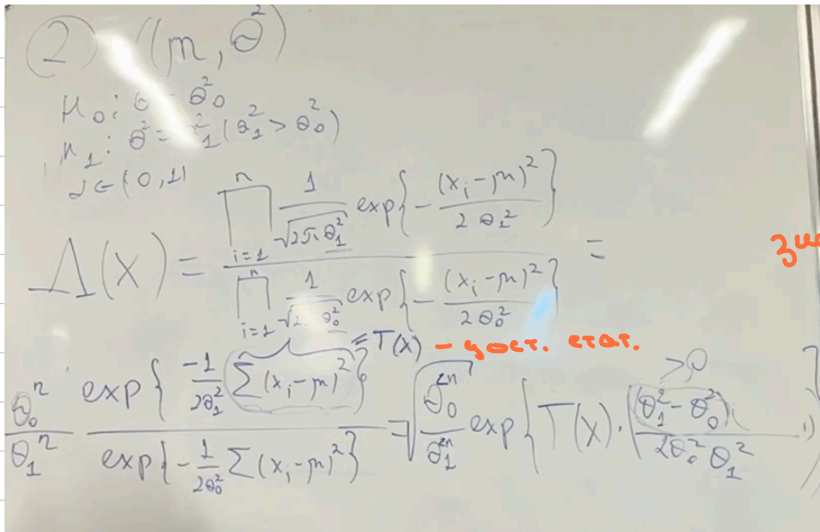


Считаем мощность:

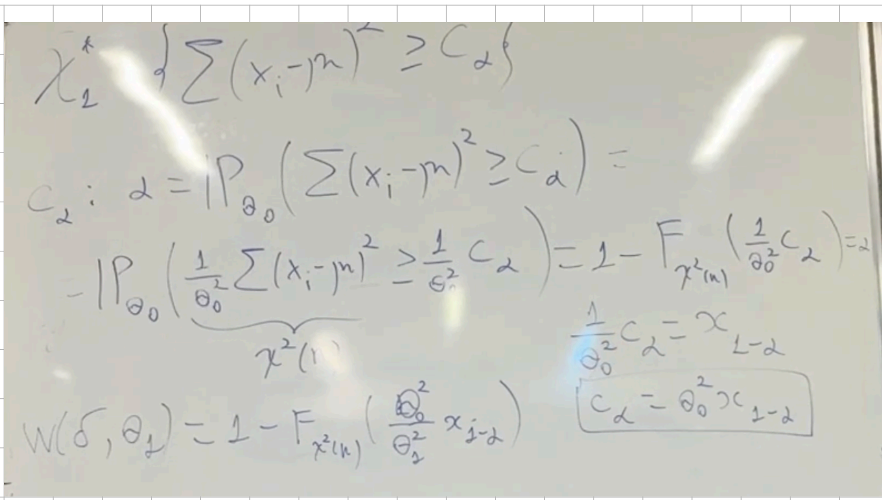


2.

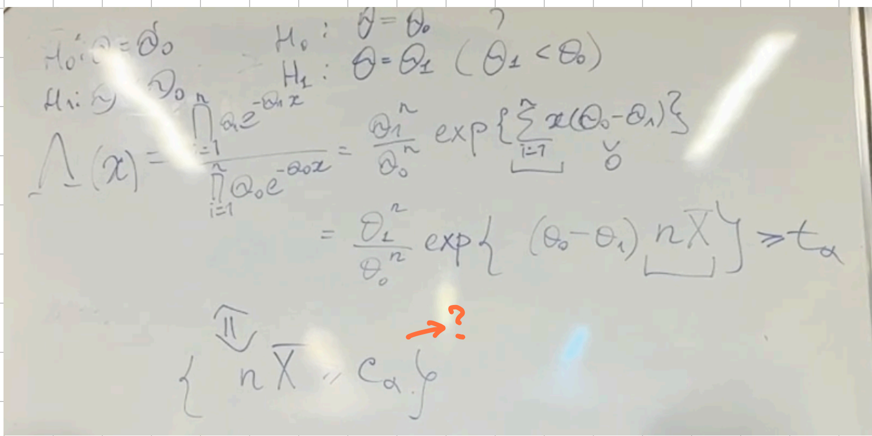
2. Пусть дана выборка $X_1, \dots, X_n$ из нормального распределения $\mathcal{N}(\cancel{\theta}\,\mu, \theta)$, μ известно. Построить наиболее мощный критерий для проверки гипотезы $H_0 : \theta_0$ против альтернативы $H_1 : \theta = \theta_1$ $(\theta_1 > \theta_0)$ на уровне значимости $\alpha \in (0, 1)$. Найти мощность этого критерия.

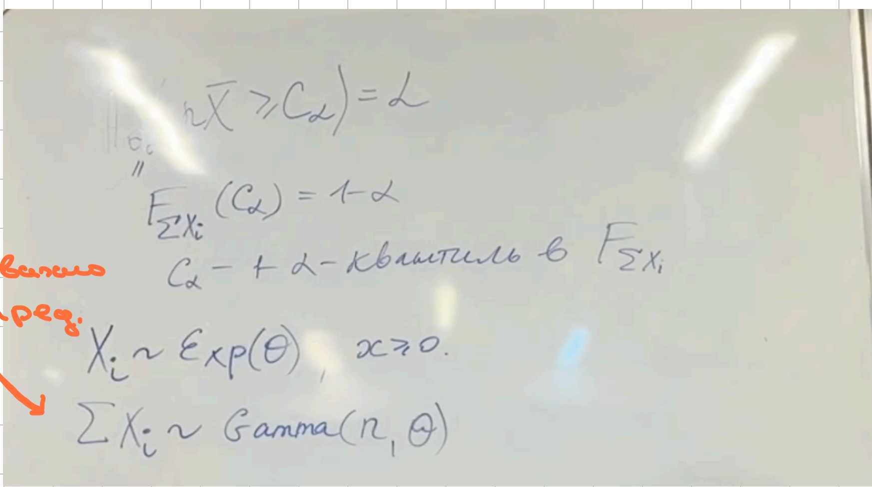


здесь опять сохран!



3. 3. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – выборка из экспоненциального распределения $\mathrm{Exp}(\theta)$. Постройте равномерно наиболее мощный критерий уровня значимости α для проверки гипотезы H_0: $\theta = \theta_0$ против альтернативы H_1: $\theta < \theta_0$. Вычислите его мощность.





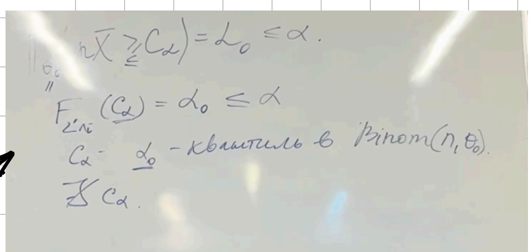
почему важно знать распред.

Короткое обсуждение:

4. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – выборка из распределения Бернулли $\mathrm{Bin}(1, \theta)$. Проверьте гипотезу H_0: $\theta = \theta_0$ против альтернативы H_1: $\theta = \theta_1$ $(\theta_1 < \theta_0)$ на уровне значимости α.

дост. стат. убыв $\Rightarrow$ $\{\bar{X} \le C_\alpha\}$
~ Binom

так как дискретное,
то нужн. кв. не найдется,
берём ближайшие α_0 для которого есть.



5. Имеется X_1 – выборка объёма 1. Проверьте гипотезу

$$H_0 : X_1 \sim \mathcal{U}(0, 1)$$

против альтернативы

$$H_1 : X_1 \sim \mathrm{Exp}(1).$$

Постройте наиболее мощный критерий уровня значимости α для различения этих гипотез и вычислите его мощность.